Clase 17: Integrales triples

C.J. Vanegas

4 de junio de 2008

Definición 1. *Considere la función* $f : B \to \mathbb{R}$ *acotada en onde* $B = [a, b] \times [c, d] \times [p, q]$.
Sea $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, *tal que* $x_{i+1} - x_i = \dfrac{b-a}{n}$,
$c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d$, *tal que* $y_{j+1} - y_j = \dfrac{d-c}{n}$,
$p = z_0 < z_1 < \cdots < z_n = q$, *tal que* $z_{n+1} - x_n = \dfrac{q-p}{n}$,
una partición de B, *esta partición produce* n^3 *subcubos* B_{ijk}.
Considere la suma:
$S_n = \displaystyle\sum_{i,j,k=0}^{n-1} f(c_{ijk})\Delta V_{ijk}, \quad c_{ijk} \in B_{ijk} \quad \Delta V_{ijk} = \Delta V = \textit{vol de } B_{ijk}.$
Entonces definimos la integral triple de f *sobre* B *como:*
$\displaystyle\iiint_B f(x, y, z)dV = \lim_{n\to\infty} S_n$, *si este límite existe.*

Observación 1. *Funciones continuas definidas en* B *son integrables.*
Funciones acotadas cuyas discontinuidades están contenidas en gráficas de funciones continuas integrables.
Las propiedades para las integrales dobles valen para la integral triple.

1. Reducción a integrales iteradas

Sea $f : B \to \mathbb{R}$ *integrable.*
Si existe cualquier integral iterada (son 6) entonces ella es igual a la integral triple:

$$\iiint_B f dv = \int_p^q \int_c^d \int_a^b f\, dxdydz$$

$$= \int_p^q \int_a^b \int_c^d f\, dydxdz$$

$$= \int_a^b \int_p^q \int_c^d f\, dydzdx$$
$$= \int_a^b \int_c^d \int_p^q f\, dzdydx$$
$$= \int_c^d \int_p^q \int_a^b f\, dxdzdy$$
$$= \int_c^d \int_a^b \int_p^q f\, dzdxdy$$

Ejemplo 1. *Calcule:* $\int_1^2 \int_0^1 \int_0^3 xyz\, dxdydz = \int_1^2 \int_0^1 \frac{x^2}{2} yz|_0^3\, dydz = \int_1^2 \int_0^1 \frac{9}{2} yz\, dydz = \frac{9}{2} \int_1^2 \frac{y^2}{2} z|_0^1\, dz = \frac{9}{4} \frac{z^2}{2}|_1^2 = \frac{9}{2} - \frac{9}{8}$

2. Regiones elementales

Una región elemental en el espacio tridimensional es aquella en la que una de las variables está entre dos funciones de las otras dos variables, siendo los dominios de estas funciones una región elemental en el plano.
Por ejemplo, si D es una región elemental en xy y si $\gamma_1(x,y) \leqslant \gamma_2(x,y)$, entonces una región elemental es $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in D,\ \gamma_1(x,y) \leqslant z \leqslant \gamma_2(x,y)\}$.
Otra región elemental: $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (y,z) \in D,\ \rho_1(y,z) \leqslant x \leqslant \rho_2(y,z)\}$,
o $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,z) \in D,\ \nu_1(x,z) \leqslant y \leqslant \nu_2(x,z)\}$.
Si una región elemental se puede describir de cada una de estas maneras, llamaremos a esta región, **región elemental simétrica**.

3. Integral sobre regiones elementales

Cualquier función continua en una región elemental es integrable en esa región.
Si $w = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in D,\ \gamma_1(x,y) \leqslant z \leqslant \gamma_2(x,y)\}$ entonces: si D es de tipo 1:

$$\iiint_w f(x,y,z)dV = \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \int_{\gamma_1(x,y)}^{\gamma_2(x,y)} f(x,y,z)\, dzdydx$$

y si D es de tipo 2:

$$\iiint_w f(x,y,z)dV = \int_c^d \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} \int_{\gamma_1(x,y)}^{\gamma_2(x,y)} f(x,y,z)\, dzdxdy$$

. Similarmente si w es otro tipo de región elemental. si $f = 1$, $\iiint_w dxdydz = \text{vol(w)}$

Ejemplo 2. *Descriir la región que está entre el cono* $z = \sqrt{x^2+y^2}$ *y el paraboloide* $z = x^2 + y^2$ *como una región elemental.*

Solución 1. $\sqrt{x^2+y^2} \geqslant x^2 + y^2$ *si* $0 \leqslant x, y \leqslant 1$
$x^2 + y^2 \leqslant z \leqslant \sqrt{x^2+y^2}$
$-\sqrt{1-y^2} \leqslant x \leqslant \sqrt{1-y^2}$
$-1 \leqslant y \leqslant 1$
Se cortan en 0 *y en* $x^2 + y^2 = 1$

Ejemplo 3. *Hallar el volumen limitado por* $x^2 + 2y^2 = 2$, $z = 0$, $x + y + 2z = 2$

Solución 2. $x^2 + 2y^2 = 2 \Rightarrow \dfrac{x^2}{\sqrt{2}} + \dfrac{y^2}{1^2} = 1$
$0 \leqslant z \leqslant \dfrac{2-x-y}{2}$
$-\sqrt{1-\dfrac{x^2}{2}} \leqslant y \leqslant \sqrt{1-\dfrac{x^2}{2}}$
$-\sqrt{2} \leqslant x \leqslant \sqrt{2}$

$$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{1-\frac{x^2}{2}}}^{\sqrt{1-\frac{x^2}{2}}} \int_0^{\frac{2-x-y}{2}} dzdydx = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{1-\frac{x^2}{2}}}^{\sqrt{1-\frac{x^2}{2}}} \frac{2-x-y}{2}\, dydx =$$

$$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} y - \frac{x}{2}y - \frac{y^2}{4}\, dx \Big|_{-\sqrt{1-\frac{x^2}{2}}}^{\sqrt{1-\frac{x^2}{2}}} = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left(-x\sqrt{1-\frac{x^2}{2}} + 2\sqrt{1-\frac{x^2}{2}} \right) dx = \frac{2}{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \sqrt{2-x^2}\, dx$$

Haciendo el siguiente cambio $x = \sqrt{2}\sin\theta \Rightarrow dx = \sqrt{2}\cos\theta$ *con* $-\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$, *tenemos que:*

$$\frac{2}{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \sqrt{2-x^2}\, dx = \frac{2}{\sqrt{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sqrt{2}\cos\theta)^2\, d\theta = 2\sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\, d\theta = \pi\sqrt{2}.$$

Ejemplo 4. *Calcule* $\iiint_w z\, dxdydz$, *donde* w *es la región acotaa por los planos* $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $z = 1$ *y el cilíndro* $x^2 + y^2 = 1$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$.

Solución 3. *Como* $x^2 + y^2 = 1$, *entonces* $y = \pm\sqrt{1-x^2}$

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} z\, dydzdx = \int_0^1 \int_0^1 zy|_0^{\sqrt{1-x^2}}\, dzdx = \int_0^1 \int_0^1 z\sqrt{1-x^2}\, dzdx = \int_0^1 \frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}dx$$

$$\underbrace{=}_{*} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\cos^2\theta\, d\theta = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(\theta + \sin\theta\cos\theta)\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{8}$$

$*$ = *Se refiere al siguiente cambio:* $x = \sin\theta \Rightarrow dx = \cos\theta\, d\theta$ *con* $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$